**Euclides e a geometria**

**César Benjamin**

**Folha de S. Paulo, 1 de agosto de 2010**
**Caderno Ilustríssima**

Passou despercebida a primeira edição brasileira do livro mais editado no mundo, depois da Bíblia: os *Elementos*, de Euclides, o tratado científico mais importante da história.

Quase nada sabemos do autor e das circunstâncias que cercaram a criação da obra no século III a.C.. Por isso, e pela impressionante dimensão do trabalho, alguns já propuseram que Euclides pode ter sido um nome coletivo e os *Elementos*, a obra de uma escola. Mas isso não é provável. A maioria dos estudiosos situa por volta de 295 a. C. o ponto médio da vida ativa do geômetra e aceita que ele estudou em Atenas até se transferir para Alexandria. Além dos *Elementos*, autores antigos referem-se a onze livros seus, entre os quais um *Livro das falácias*, uma *Astronomia* e um sobre música.

Houve outras obras com o mesmo título, que era usado para designar compilações de conhecimentos básicos. Mas elas se perderam, esmagadas pelo peso do tratado de Euclides. Em sua época a matemática helênica já estava avançada, com uma tradição que remontava a Tales e Pitágoras, passando por Platão, Aristóteles e seus discípulos. “Euclides”, diz Proclo, “juntou os elementos, ordenando muitos teoremas de Eudoxo, aperfeiçoando os de Teeteto e acrescentando demonstrações irrefutáveis que só tinham sido vagamente comprovadas por seus antecessores.”

É difícil rastrear a trajetória da obra, sujeita por mais de 2 mil anos ao arbítrio de copistas, tradutores e comentadores, o que gerou diferentes traduções, traduções de traduções, versões resumidas, interpretações e interpolações. A primeira tradução árabe, feita por al-Hajjāj no século VIII, registra no frontispício que "deixou de lado os supérfluos, preencheu as lacunas, corrigiu ou retirou os erros, até ter melhorado o livro e o tornado mais exato, e resumiu-o, conforme é encontrado na versão atual." Poderíamos multiplicar tais exemplos. Em Lisboa, encontrei em um sebo *Los elementos geométricos del famoso Euclides Megarense, amplificados de nuevas demonstraciones por el sargento general de batalla Don Sebastian Fernandez de Medrano (1646-1705)*; o bravo general já erra no título, ao confundir o geômetra com um homônimo, Euclides de Megara.

O livro foi traduzido diversas vezes para o latim e o árabe na Idade Média, e para as mais importantes línguas vernáculas a partir do Renascimento. Até o século XIX, todas as edições em grego adotaram como referência a de Teon de Alexandria, preparada cerca de setecentos anos depois da época de Euclides. Em 1808, porém, François Peyrad constatou que um manuscrito trazido da Itália por Napoleão era uma versão mais próxima do original, iniciando pesquisas que culminaram em 1888 com o estabelecimento da edição de J. L. Heiberg, hoje aceita como a mais fiel. Ela foi o ponto de partida da tradução que Irineu Bicudo realizou durante dez anos, recém-publicada pela Editora da Unesp. Um trabalho assim não se faz por dinheiro, mas por amor. Não há como exagerar a sua importância.

A ausência de um aparato crítico faz a edição brasileira (um volume, 594 páginas) menor, em tamanho, que outras que a antecederam. A espanhola (Gredos), por exemplo, tem dois volumes e 772 páginas, enquanto a francesa (PUF) atinge quatro volumes e 2.024 páginas. Mas, no que é essencial, estamos diante de um trabalho cuidadoso e competente: comparado com as outras edições, o texto em português parece até mesmo mais fiel ao estilo seco de Euclides.

***

A geometria nasceu no Egito antigo como ciência empírica, um conjunto de métodos de mensuração necessários para reconstituir os limites das propriedades em seguida às inundações anuais do Nilo. O gênio grego a transformou em um sistema dedutivo, gigantesco salto.

Os gregos viram que os conhecimentos geométricos não poderiam depender da experiência ou da evidência sensorial, pois uma e outra nunca nos permitiriam entrar em contato com pontos, retas e planos, meras abstrações. Esses conhecimentos dependeriam de demonstrações. Sabiam, porém, que era impossível demonstrar tudo, pois isso provocaria uma regressão ao infinito, com cada afirmação sendo sempre remetida a afirmações anteriores. Para evitar isso, era preciso buscar o que Aristóteles chamou de “primeiros princípios”, que, sendo evidentes, dispensariam as provas. A partir dessa âncora, a lógica nos conduziria a conhecimentos válidos, constituindo-se assim uma “ciência demonstrativa”. Coube a Euclides realizar esse ideal.

Em um sistema desse tipo, hoje denominado axiomático, a escolha das proposições primeiras, ou postulados, devia atender três exigências principais: consistência (a partir deles não se podem deduzir logicamente proposições contraditórias), completude (entre quaisquer duas proposições contraditórias formuladas nos termos do sistema, uma pode ser corretamente demonstrada) e independência (nenhum postulado pode ser demonstrado a partir dos demais). (Em 1931, Kurt Gödel provou que sistemas axiomáticos usuais, como a aritmética e a teoria dos conjuntos, não podem preencher o requisito da completude, mas isso ultrapassa o tema deste artigo.)

Euclides deduziu toda a sua geometria – 372 teoremas e 93 construções – a partir de cinco postulados, que aparecem acompanhados de 23 definições e cinco noções comuns.

Quando Michelangelo foi perguntado como conseguira esculpir a Pietà a partir de um bloco de mármore, deu a famosa resposta: "Ela já estava lá; eu só tirei o excesso." Euclides poderia dizer o mesmo, lidando agora não com a matéria, mas com o espírito. Os postulados aparecem no início dos *Elementos*, mas isso não deve nos enganar: eles são o ponto de chegada de uma longa reflexão prévia que vai desbastando o pensamento, muitas vezes tendo teoremas como ponto de partida. A ordem expositiva do sistema, de natureza lógica, não segue o caminho percorrido na sua formulação.

A escolha de apenas cinco postulados – todos simples, por definição – para deles derivar uma geometria completa é um trabalho de gênio. É o momento mais difícil da construção, pois as proposições que estamos acostumados a usar derivam de outras proposições, cujos pontos de partida desconhecemos.

***

Euclides é exaustivo no que Leibniz chamou de "arte de demonstrar". Qualquer um de nós dispensaria diversas de suas demonstrações, por óbvias, mas não devemos criticar essa obsessão: a cultura helênica estava repleta de sofistas habilíssimos em contestar as verdades mais evidentes.

O esforço para superá-los resultou em uma construção intelectual de magnífica concepção: as proposições primeiras, indemonstráveis, são enunciadas explicitamente; os termos usados são objeto de definição prévia; e os teoremas são demonstrados (às vezes, com redução ao absurdo) sem o recurso aos sentidos ou à experiência empírica. Novas provas se sucedem, sempre por lógica, com base naquilo que foi provado antes. O resultado é uma rede na qual todas as proposições se comunicam, sustentando-se umas às outras. No lugar da compilação de receitas práticas ou de enunciados empíricos, legados por egípcios e babilônios, surge assim uma ciência racional.

O êxito foi inigualável. É o único caso, na história, em que um só livro fundou uma disciplina científica, instituindo um padrão que passou a servir de referência ao pensamento rigoroso. Graças a Euclides, a unidade e a estabilidade da geometria foram excepcionais. Durante mais de 2 mil anos ela permaneceu fundamentalmente a mesma, com acréscimos, é claro, mas sem crises, confundindo-se por isso com os fundamentos da razão. Os demais ramos do conhecimento deviam inspirar-se nela.

A obra de Newton reforçou a importância da de Euclides. Na juventude, Newton foi traído pela aparente simplicidade dos *Elementos*, cuja leitura iniciou e largou, por considerá-la banal. Redimiu-se adulto: depois de reestudar o livro, percebeu que nos seus postulados estão implícitas, como veremos, as propriedades do espaço, tal como ele mesmo veio a conceber no seu sistema do mundo: um meio homogêneo, imutável, intemporal, infinito e infinitamente divisível, que existe independentemente do conteúdo físico que contém. Embora esse espaço absoluto tenha se tornado desnecessário na física contemporânea, não se deve subestimar a profundidade de sua concepção: nenhuma de tais características é acessível aos sentidos. A ideia euclidiana de uma extensão pura e de um espaço sem qualidades é extremamente abstrata.

No fim do século XVIII, os *Elementos*, de Euclides, e os *Principia*, de Newton, davam ao conhecimento científico uma base imponente, sobre a qual

Kant, maravilhado, filosofou. Ele viu uma geometria dotada de validade universal, construída de modo racional e, ao mesmo tempo, passível de ser aplicada ao mundo físico. Identificou nisso um problema profundo: como um conhecimento que se desenvolve sem recorrer à realidade sensível pode ser a chave para decifrá-la? Como uma pura criação da razão humana pode representar, com tamanha perfeição, o mundo exterior? Que estranha conexão é essa, entre a mente do homem e as coisas?

Tendo Euclides e Newton como principais referências, Kant concluiu que espaço e tempo são "intuições puras", estruturas do próprio sujeito. A intuição *a priori* do espaço nos possibilita os juízos *a priori* da geometria, enquanto a intuição *a priori* do tempo funda as operações do cálculo, que se sucedem e duram.

A construção kantiana sofreu duro golpe quando, primeiro, a geometria euclidiana e, depois, a física newtoniana perderam seu caráter universal. Para entender isso, no caso da geometria, precisamos contemplar os cinco postulados.

***

Uso a tradução de Irineu Bicudo, mas faço a ressalva de que o que Euclides chama de "reta" é o que hoje chamamos de "segmento de reta".

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça ângulos interiores e do mesmo lado menores que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores que dois retos.

O primeiro postulado diz que somente uma reta pode ser desenhada entre dois pontos quaisquer, o que equivale a dizer que, se dois segmentos de reta têm as mesmas extremidades, todo o seu comprimento coincide; logo, o espaço é contínuo. O segundo postulado diz que quaisquer retas podem ser prolongadas indefinidamente; logo, o espaço é infinito em todas as direções. O terceiro postulado afirma a existência do círculo e enfatiza que o espaço, além de infinito, é infinitamente divisível, pois diz que o raio de um círculo pode ter qualquer comprimento.

O quarto postulado é desconcertante por sua aparente trivialidade. Note-se, no entanto, que Euclides não diz que os ângulos retos são retos, o que seria uma redundância; ele diz que são "iguais entre si", uma ideia que não está contida na definição de ângulo reto. Ao estabelecer que as figuras podem ocupar quaisquer posições e conservar suas formas, permanecendo "iguais entre si", o postulado implica um espaço homogêneo.

Os postulados, como se vê, definem as características do espaço – hoje seria mais rigoroso dizer de um tipo de espaço – e estabelecem a existência de pontos, retas e círculos, os elementos básicos da geometria de Euclides, com os quais ele demonstrará a existência de todas as outras figuras que define.

Mas Euclides sentiu a necessidade de também postular a existência de paralelas, necessárias em muitas demonstrações. Era uma encrenca, pois exigia encontrar uma afirmação que fosse evidente e, ao mesmo tempo, se referisse ao que acontece no espaço remoto: paralelas são retas coplanares que nunca se encontram. A solução do geômetra, mais uma vez, foi muito engenhosa: propôs um postulado que só fala de retas secantes, cuja existência é indiscutível, mas mantém implícita a existência de paralelas.

Mesmo assim, ele logo foi reconhecido como problemático. Ouçamos Proclo: "O fato de que as retas convergem quando os ângulos retos são diminuídos é certo e necessário; mas a afirmação de que chegarão a se encontrar é apenas verossímil, mas não necessária, na falta de um argumento que prove que isso é verdade para duas linhas retas. Pois o fato de que existam algumas linhas que se aproximam indefinidamente mas permanecem sem se tocar [*asýmptotoi*], por mais improvável e paradoxal que pareça, também é certo e está comprovado em relação a linhas de outro tipo. Por que, no caso das retas, não é possível ocorrer o mesmo que ocorre com as linhas mencionadas?" Proclo conclui que o quinto postulado "deve ser riscado dos postulados, pois se trata de um teorema repleto de dificuldades".

O debate sobre isso envolveu os grandes geômetras gregos, árabes e europeus durante mais de 2 mil anos, sem solução. Cresceram as suspeitas de que não se tratava de um verdadeiro postulado, mas as tentativas de manejá-lo como um teorema exigiam introduzir novos postulados igualmente problemáticos, que eram meros equivalente lógicos do postulado de Euclides; configurava-se assim o erro que os filósofos chamam de petição de princípio, ou seja, adotar como ponto de partida de uma demonstração o mesmo argumento que será provado no fim dela. Tentou-se deduzir o quinto postulado dos demais, até que se provou que isso era impossível. Buscaram-se formulações alternativas, todas insuficientes. E, quando ele era simplesmente retirado, o sistema perdia o requisito da completude: muitos teoremas não podiam mais ser demonstrados.

Parecia impossível inserir a afirmação de Euclides em seu próprio sistema, consistentemente. O postulado das paralelas, como ficou conhecido, permanecia como um corpo estranho, um expediente que preenchia uma lacuna no encadeamento lógico. D'Alembert disse que ele era "o escândalo da geometria", pois a credibilidade dos teoremas não pode ser maior do que o grau de credibilidade associado ao postulado que tenha menor credibilidade.

Dois pensadores estiveram perto da solução, o árabe al-Khayyami (1048-1131) e o jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733). Ambos adotaram o caminho da redução ao absurdo. Aceitando o restante do sistema euclidiano e negando o quinto postulado, pretendiam chegar a contradições, o que demonstraria a validade e a necessidade dele. Não sabemos bem até onde foi al-Khayyami, mas Saccheri abandonou a empreitada quando começou a encontrar o que denominou "teoremas estranhos".

Teve nas mãos o bilhete premiado, mas não percebeu. Começara a descobrir uma outra geometria, mas viu nisso um erro. Estava preso à ideia milenar de que só a geometria de Euclides podia existir.

***

Só no século XIX, um matemático de valor excepcional, o alemão Carl Friedrich Gauss, e dois matemáticos jovens, o húngaro János Bolyai e o russo Nicolai Lobachevski, trabalhando de forma independente, ousaram prosseguir até o fim na dedução dos "teoremas estranhos". Em vez de encontrar contradições, como esperavam, chegaram a geometrias consistentes e completas, diferentes da euclidiana, mas sem defeito lógico.

Gauss não divulgou seu trabalho, pois acreditou que ninguém o compreenderia. O inseguro Bolyai entregou o manuscrito ao pai, também matemático, que o enviou a Gauss sem saber que este último já tinha percorrido o mesmo caminho. O texto pioneiro de Lobachevski, por sua vez, denominava-se “Geometria imaginária”. Os descobridores pisavam em ovos: viam que as descobertas eram deveras estranhas. Não era para menos: Bolyai e Lobachevski, por exemplo, adotaram como postulado a afirmação de que por um ponto fora de uma reta é possível fazer passar mais de uma paralela à reta dada...

O trabalho dos três foi completado depois, magistralmente, por um aluno de Gauss, Bernhard Riemann, cuja geometria nega a existência de paralelas. Ao contrário do espaço infinito de Euclides, o espaço de Riemann é finito, mas ilimitado, pois ele aplicou a noção de curvatura ao espaço tridimensional, em uma formulação muito abstrata, quase sempre mal compreendida. (Muito depois, essa “geometria imaginária” foi decisiva na formulação da relatividade geral, a teoria física mais importante do século XX.)

Para dar só um exemplo dos resultados discrepantes, em cada uma das geometrias a soma dos ângulos de um triângulo é diferente: sempre igual a 180 graus em Euclides, sempre menor que esse valor em Lobachevski e Bolyai, sempre maior em Riemann.

Eugênio Beltrami, Felix Klein, Henri Poincaré e David Hilbert demonstraram em sequência, por diversas vias, que as novas geometrias tinham a mesma validade que a geometria de Euclides. Mais ainda: demonstraram que a eventual inconsistência de uma delas implicaria a inconsistência do próprio sistema euclidiano. Nunca mais poderíamos, como Saccheri, nos livrar dos “teoremas estranhos”. Desde então, as geometrias se multiplicaram, mas, para nosso consolo, Sophus Lie demonstrou que elas não são infinitas.

Como é possível essa existência múltipla da verdade? Qual, afinal, a geometria verdadeira? Ouçamos Einstein: “Não podemos nos interrogar se é verdade que por dois pontos passa uma única reta. Podemos apenas dizer que a geometria de Euclides trata de figuras, que ela chama de ‘retas’, às quais atribui a propriedade de serem determinadas univocamente por dois de seus pontos. O conceito de ‘verdadeiro’ não se aplica aos enunciados da geometria pura, pois com ‘verdadeiro’ nós costumamos, em última análise, designar a correspondência com um objeto ‘real’. Porém, a geometria não se ocupa da relação entre seus conceitos e os objetos da experiência, mas apenas com os nexos lógicos desses conceitos entre si.”

Teoremas incompatíveis entre si podem ser igualmente verdadeiros se estiverem perfeitamente integrados em diferentes sistemas lógicos. Compreender isso foi a culminância do ideal da ciência grega, de um modo que nem os gregos ousaram pensar.

***

Sempre que avança, a ciência cria problemas novos. Por isso, sua marcha não pode ter fim. Se a matemática passou a admitir diferentes geometrias, qual delas se aplica ao mundo físico? No século XIX, a questão era inédita. Gauss concluiu que a resposta dependeria da observação empírica. Com medições geodésicas, lançou-se em busca de uma prova experimental, mas seus esforços não foram conclusivos: nas escalas humanas, as geometrias convergem para padrões euclidianos. (Poincaré propôs outra solução: as geometrias são convenções, de modo que todas são aplicáveis; a euclidiana é apenas mais cômoda.)

Paradoxalmente, a culminação do ideal grego redimiu a geometria praticada por egípcios e babilônios, que ele mesmo havia superado. Seria mais correto dizer que houve uma bifurcação. Pois, ao lado de uma geometria física, novamente empírica, as pesquisas em geometria pura foram impulsionadas na direção de formulações ainda mais abstratas, em busca de procedimentos lógicos mais rigorosos.

Hilbert elaborou novos postulados de modo a apartá-los de qualquer representação sensível. Em vez de evocar objetos especificados, buscam estabelecer relações entre objetos genéricos, representados por letras, e são manejados sem que contenham nenhum sentido, segundo regras puramente formais. Esse caráter hiperabstrato da matemática contemporânea foi sintetizado, não sem ironia, por Bertrand Russell: "A matemática é uma ciência na qual nunca sabemos do que estamos falando, nem se aquilo que estamos falando é verdadeiro."

Pobre Kant. Se a matemática trabalha com proposições destituídas de sentido, adaptáveis a qualquer conteúdo, então se desfaz o problema que o atormentou. A aplicabilidade das leis matemáticas ao real não decorre de uma harmonia maravilhosa entre o espírito e as coisas. Tais leis valem em nosso mundo simplesmente porque valem em todos os mundos possíveis.